MAI 3 - domácí úkol ze 4. cvičení

Promyslete a „sepište" řešení aspoň jedné z následujících úloh:

1. Formulujte Heineho definici spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory a dokažte, že je ekvivalentní původní definici spojitosti z přednášky (přednáška 3., 1. úloha).

2. Dokažte, že obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina (přednáška 3. 6. úloha).

3. Dokažte, že
   a) uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru je úplná (přednáška 4., 15. úloha);
   b) úplná podmnožina metrického prostoru je uzavřená (přednáška 4., 13. úloha);
   c) kompaktní podmnožina metrického prostoru je úplná (přednáška 4., 14. úloha).

A pokud budete mít chuť, tak zkuste dokázat (nebo si najít a přečíst důkaz):

4. Buď M množina všech posloupností reálných čísel $x = \{x_n\}$, pro které $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konverguje.

   a) Ukažte, že $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$, $x, y \in M$, $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ má vlastnosti metriky

   (pro tento metrický prostor se užívá se označení (l^2, d_2) (pokud jste toto už neřešili v dú 3).

   b) Zkuste ukázat, že metrický prostor (l^2, d_2) je úplný metrický prostor.